Задача, которая ставится:
Частица массой m и энергией E совершает одномерное движение в потенциале U(x). Как он будет двигаться?

Ответ: чтобы добраться от точки x_0 до точки x, требуется время

$$t - t_0 = \pm \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}$$

Знак, как правило, очевиден в каждой конкретной задаче.
Обсудим смысл этой формулы.

Мы привыкли к закону движения: **r** представляется как функция t. Здесь обратный случай: координата в роли аргумента, а время в роли функции: t(x), t(r). Непривычно, но тоже бывает удобно. Например, с помощью таких законов можно очень быстро отвечать на вопросы «а сколько времени потребуется частице, чтобы она добралась оттуда-то туда-то».

Вот эта имбаформула $t - t_0 = \pm \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}$ зачастую доказывается семинаристами через Лагранжев формализм, что очень сложно и не нужно. В этой методичке я хотел бы дать их очень простой вывод.

Нам понадобится ввести скорость тела $v_E(x)$ в точке с абсциссой x. Эта та скорость, которая тело с энергией E будет иметь в точке x. E здесь в качестве параметра.
Запишем ЗСЭ, чтобы получить уравнение для скорости тела в точке x:

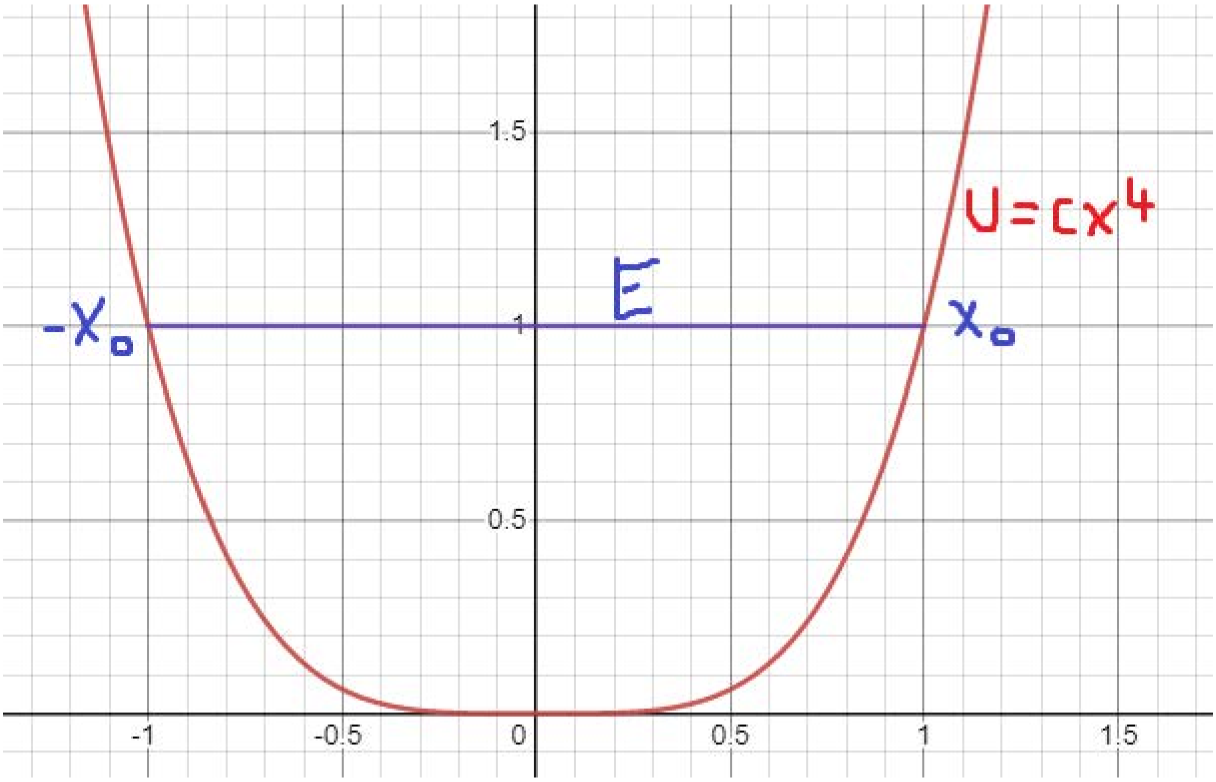
$$\frac{mv_E^2(x)}{2} + U(x) = E \Rightarrow v_E(x) = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}$$

А величина, обратная v(x), т.е.

$$\frac{1}{v_E(x)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}}$$

имеет смысл «время dt, нужное для прохождения участка dx в окрестности точки с абсциссой x».
Осталось её проинтегрировать и получить время, нужное на прохождение всего отрезка. Всё, формула выведена!

Задача. Найти период колебаний частицы с энергией E и массой m в потенциале $U = Cx^4$



Поймём, от какой до какой точки осуществляется движение. Очевидно, что на краях потенциал растёт, а частица бегает туда-обратно только в области, где потенциальная энергия $U(x)$ меньше полной E (т.е. там, где кин.энергия $E - U(x)$ положительна).

Точки отражения $-x_0$ и x_0 как раз там, где она ноль, т.е. потенциальная энергия равна полной:

$$Cx_0^4 = E => \sqrt[4]{\frac{E}{C}}$$

Тогда применяем имбаформулу:

$$\int_{-x_0}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}}$$

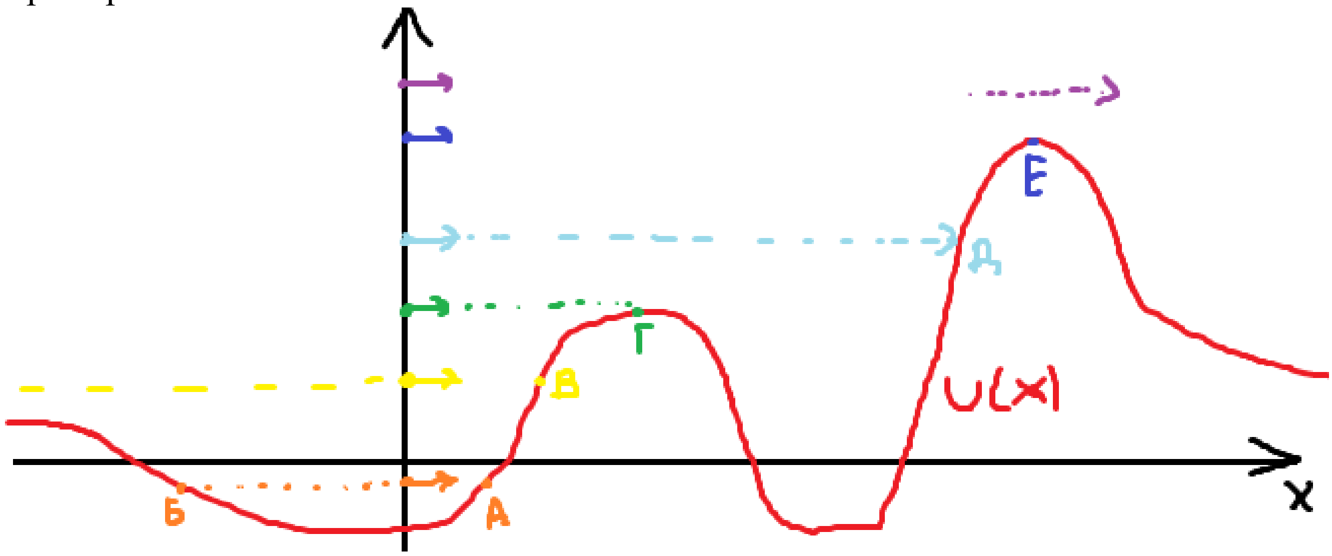
Она показывает, сколько времени нужно частицы, чтобы дойти от точки $-x_0$ в точку x_0. Это пол-периода, потому что весь период – и туда, и обратно.

Поэтому период T равен

$$T = 2\int_{-x_0}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}} = \sqrt{2m}\int_{-x_0}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = \sqrt{2m}\int_{-\sqrt[4]{\frac{E}{C}}}^{\sqrt[4]{\frac{E}{C}}} \frac{dx}{\sqrt{E - Cx^4}}$$

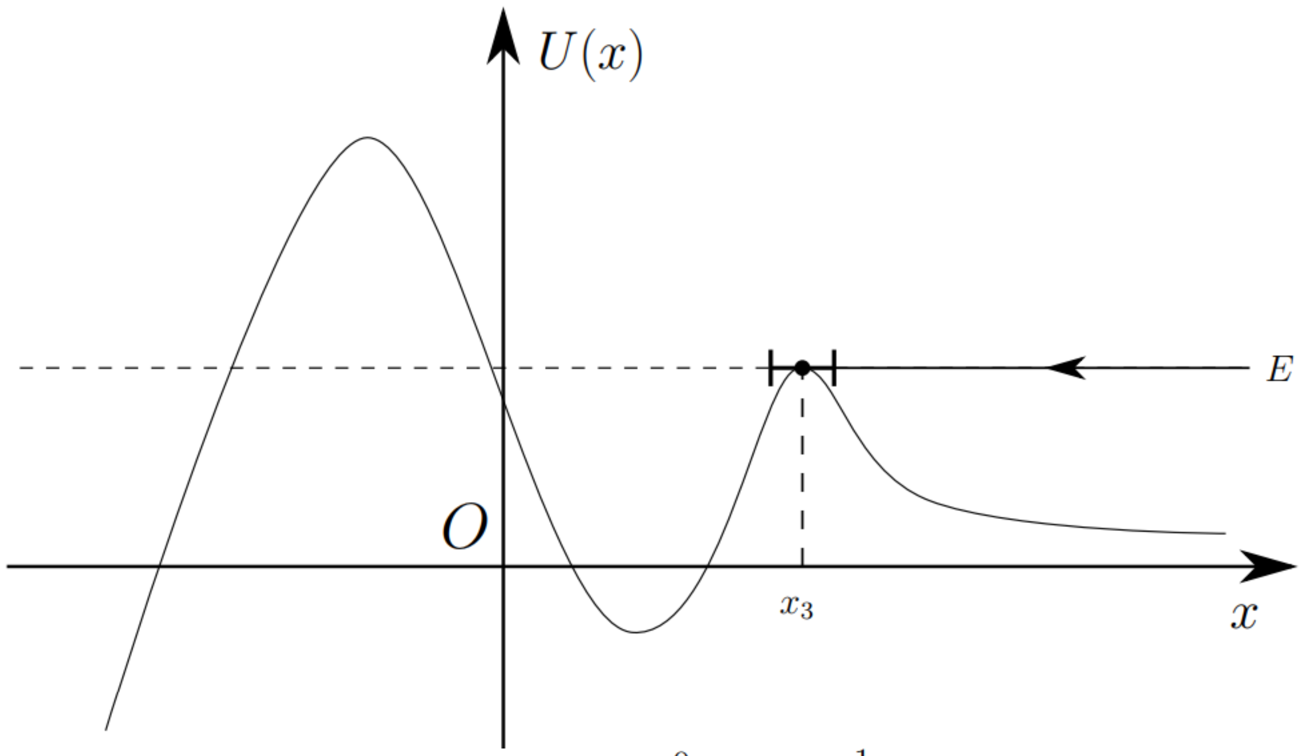
Ответ получен (интеграл будут считать перваки). Вот тут https://www.desmos.com/calculator/t1wbtoww9g можете посмотреть модуль скорости в каждой точке.

Важно качественно понимать движение частицы.
Пример:



Представим, что мы пинаем частицы из x=0 вправо с разной энергией.
С рыжей энергией частица дойдёт до точки А, где остановится и полетит назад. Д точки Б, где снова развернётся. Так она и будет туда-сюда мотаться с неким периодом.
С жёлтой энергией частица долетит до точки В, развернётся и полетит назад. На этот раз она уже свободно полетит на $-\infty$.
Зелёная энергия – потенциал касается горизонтальной прямой. В этом случае (как доказывает Степаньянц) частица будет бесконечно долго стремиться к точке Г, «завязнув» в её окрестности, почти остановившись.
Голубая энергия – частица преодолеет первый барьер (пусть и потерявши на нём время), но отразится от второго в точке Д и улетит на $-\infty$
Синяя энергия – частица преодолеет первый барьер, но, аналогично зелёному случае, завязнет в точке Е.
Фиолетовая энергия – частица преодолеет оба барьера и улетит на $+\infty$.

Доказательство от Степаньянца того, что в случае касания частица будет бесконечно долго стремиться к точке касания. У него, как видите, частица стремится из правого конца:



$$U(x)=U(x_3+(x-x_3))\approx U(x_3)+\cancel{U'(x_3)}^{\,0}\cdot(x-x_3)+\frac{1}{2}\underbrace{U''(x_3)}_{<0}(x-x_3)^2+\dots=$$

$$=E+\frac{1}{2}U''(x_3)(x-x_3)^2+\dots \quad (363)$$

$$t-t_0\approx-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(\cancel{E}-\cancel{E}-\frac{1}{2}U''(x_3)(x-x_3)^2\right)}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t-t_0\approx-\int\limits_{x_0}^{x}dx\frac{1}{\sqrt{\frac{|U''(x_3)|}{m}}(x-x_3)}=-\sqrt{\frac{m}{|U''(x_3)|}}\ln\left(\frac{x-x_3}{x-x_3}\right) \quad (364)$$

$$x-x_3\approx(x_0-x_3)\exp\left[-\sqrt{\frac{|U''(x_3)|}{m}}(t-t_0)\right]\Rightarrow x_0-x_3>0 \quad (365)$$

То есть, исходя из (365), поскольку $x_0>x_3$, а экспонента всегда положительна, тогда величина $(x-x_3)$ - тоже всегда будет положительной. Частица будет бесконечно долго приближаться к x_3.

А теперь ваша очередь.

$$U(x)=U_0\left(\frac{2}{\left(\frac{x}{x_0}\right)^2+1}+\frac{1}{\left(\frac{x}{x_0}-10\right)^2+1}\right)$$

Предсказать качественно поведение частицы при энергиях:

1) $0{,}5U_0$

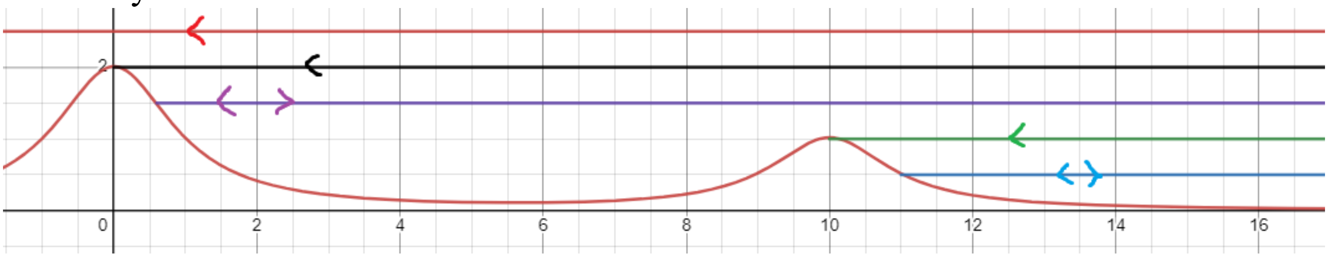
2) U_0

3) $1{,}5U_0$
4) $2U_0$
5) $2{,}5U_0$

Считать, что функция $\frac{1}{x^2+1}$ убывает достаточно быстро, чтобы на расстояниях, больше пяти, её можно считать нулём.

Варианты ответа:
1) улетит на $-\infty$
2) отразится (где?) и улетит на $+\infty$
3) завязнет (где?)

Ответикусы:



1) Частица не долетит даже до правого барьера. Наткнувшись на горку, она развернётся и улетит на $+\infty$.
2) Частица завязнет на вершине правого барьера.
3) Частица пролетит правый барьер, но отразится от левого и, пролетя снова правый барьер, улетит на $+\infty$.
4) Частица завязнет на вершине левого барьера.
5) Частица пролетит оба барьера и улетит на $-\infty$.